PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2022

Studijní program: MDUPN

Varianta A

Řešení úloh pečlivě odůvodněte.

Úloha 1 (20 bodů)
Nechť $a, b \in (0, +\infty)$. Definujme funkci

$$f(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}, \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Spočtěte:

(a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$,
(b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$,
(c) $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Vysvětlete svá řešení.

Úloha 2 (20 bodů)
Ať $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon |x| + |y| \le \sin z, z \in (0, \pi)\}$. Spočtěte

$$\int_M (5x + |y|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

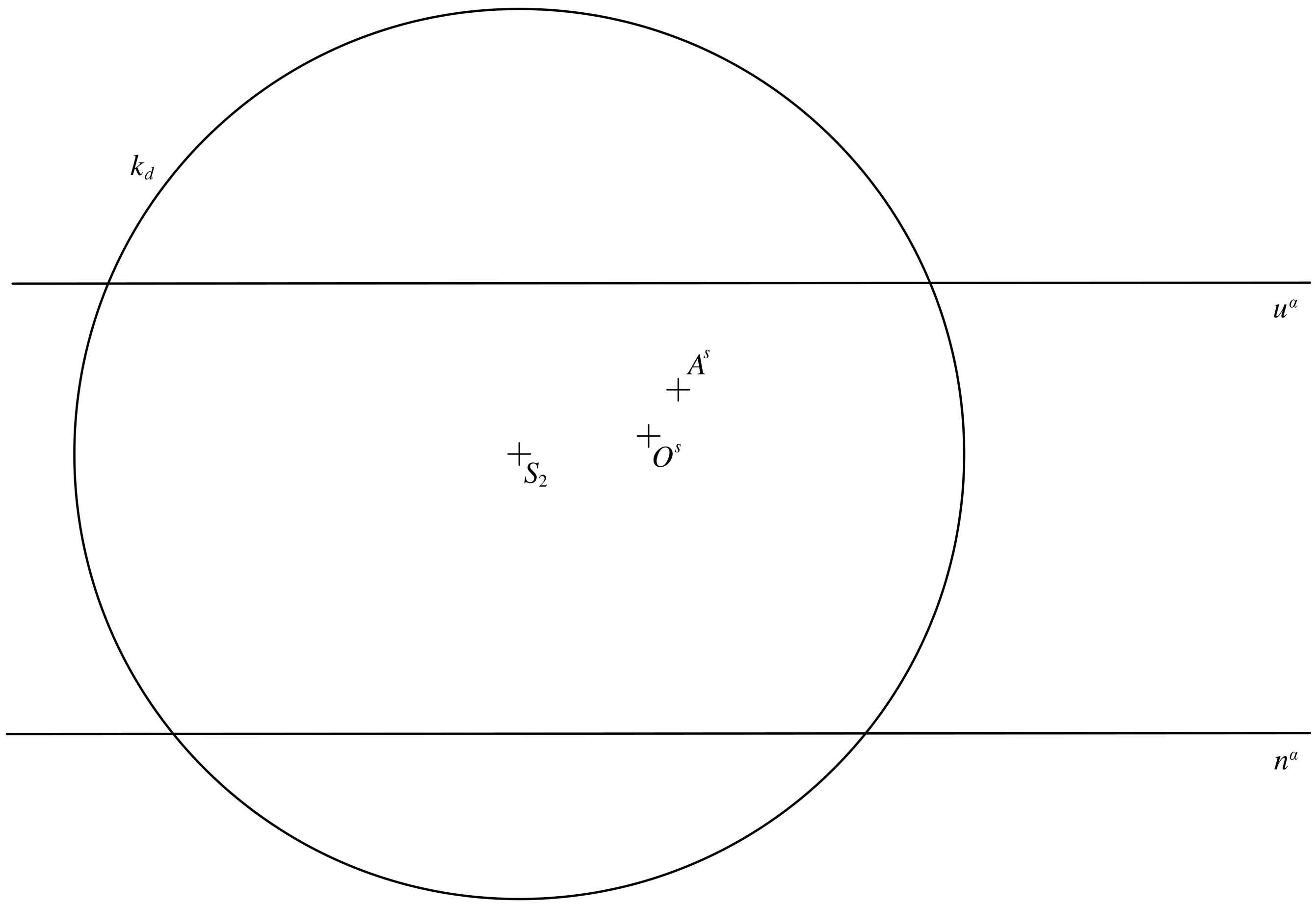
Úloha 3 (20 bodů)
Mongeovo promítání: $O = [10, 15]$, levotočivá soustava souřadnic
Zploštělý rotační elipsoid je dán:

1. rotačním pohybem: osa $o \perp \pi$,
2. tvořicí elipsou e v rovině rovnoběžné s nárysnou, bod $S = [0; 6; 4]$ je střed elipsy, velikosti poloos jsou $a = 5, 5$, $b = 3, 5$.

Sestrojte průměty elipsoidu. Zobrazte řez elipsoidu rovinou $\rho(8, 5; 10; 5)$. Určete přesně body řezu na obrysech, sestrojte osy průmětu řezu, stanovte viditelnost křivky řezu v půdoryse i náryse. (Rýsujte na nový list papíru).

Úloha 4 (20 bodů)
Středové promítání: S_2 - pravoúhlý průmět středu promítání do nákresny, k_d - distanční kružnice.

Sestrojte šestiúhelník $ABCDEF$ v rovině α, znáte-li středové průměty vrcholu A a středu O šestiúhelníku.



k_d
u^a
A^s
O^s
S_2
n^a

Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2022

Studijní program: MDUPN

Varianta A – **Řešení**

Úloha 1 (20 bodů)

(a) Pro $x > 0$ platí:

$$\max\{a,b\}2^{-\frac{1}{x}} \le f(x) \le \max\{a,b\}.$$

Z věty o dvou policistech a $\lim_{x\to+\infty} 2^{-\frac{1}{x}} = 1$ plyne, že

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \max\{a,b\}.$$

(b)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \overset{-x=y}{=} \lim_{y\to+\infty} f(-y) = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^y+\left(\frac{1}{b}\right)^y}{2}\right)^{\frac{1}{y}}} \overset{(a)}{=}$$

$$\overset{(a)}{=} \frac{1}{\max\left\{\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right\}} = \min\{a,b\}.$$

(c) Ze spojitosti exponenciely a věty o limitě složené funkce plyne, že $\lim_{x\to 0} f(x) = e^A = \sqrt{ab}$, kde

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}{x} \overset{\text{l'Hospital } \frac{0}{0}}{=} \frac{1}{2}(\log a + \log b).$$

Úloha 2 (20 bodů)

Využitím symetrie množiny M dostáváme

$$\int_M (5x+|y|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_M 5x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \int_M |y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0 + \int_M |y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

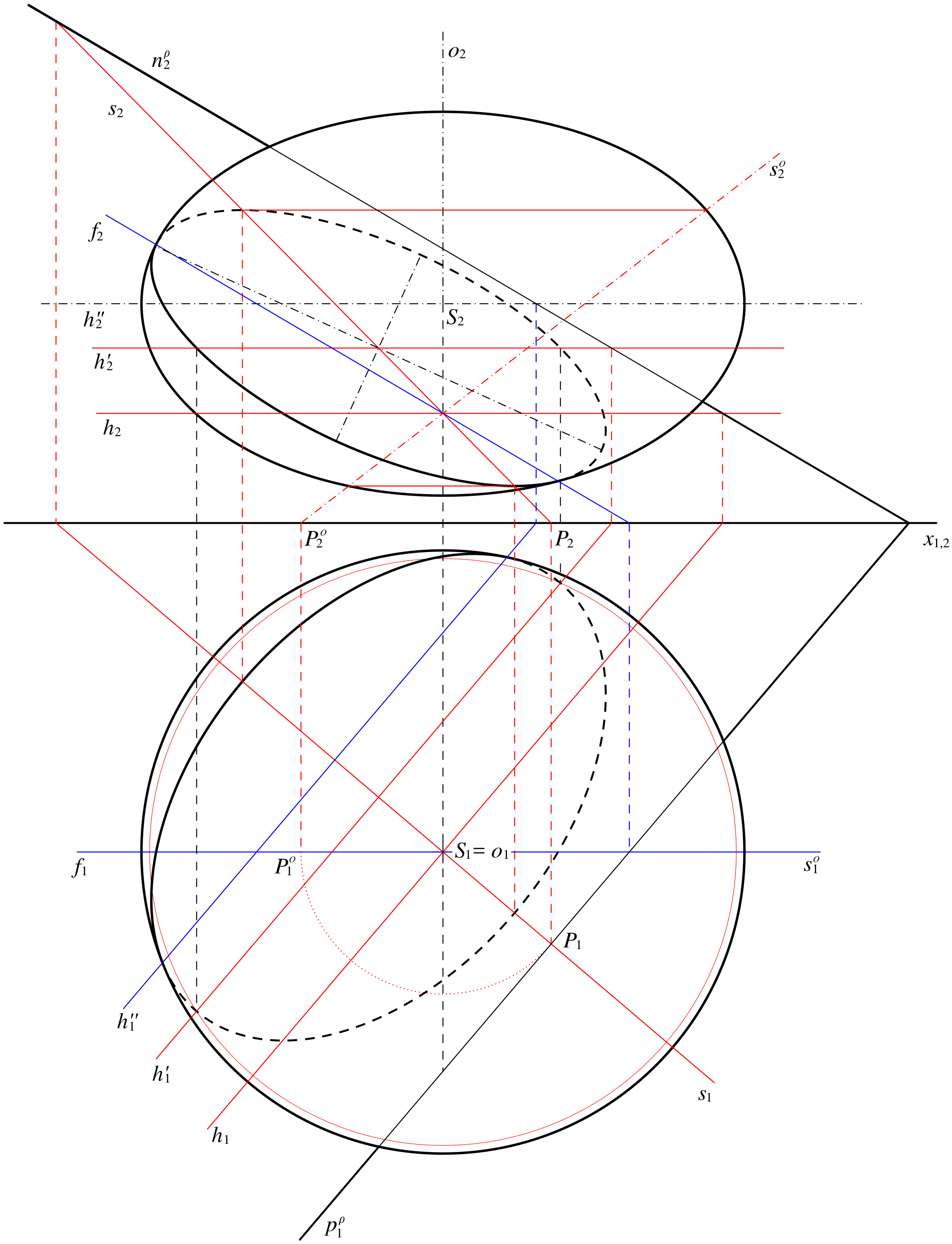
$$= 4\int_N y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde $N = M \cap \{(x,y,z) : y \ge 0, x \ge 0\}$.

Dále z Fubiniovy věty a následnou substitucí dostáváme

$$\begin{aligned}
4\int_N y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= 4\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\sin z}\left(\int_0^{\sin z - y} y\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z = \\
&= 4\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\sin z}(\sin z - y)y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z = \\
&= 4\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2}y^2\sin z - \frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=\sin z}\mathrm{d}z = 4\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{6}\sin^3 z\right)\mathrm{d}z = \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{\pi}\left(\sin z(1-\cos^2 z)\right)\mathrm{d}z = -\frac{2}{3}\int_1^{-1}\left(1-t^2\right)\mathrm{d}t = \\
&= -\frac{2}{3}\left[t - \frac{1}{3}t^3\right]_1^{-1} = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{9}.
\end{aligned}$$

Úloha 3 (20 bodů)



Úloha 4 (20 bodů)